

Муниципальное общеобразовательное учреждение
Угличский физико-математический лицей

Утверждена приказом директора лицея
№ 18 от 30 сентября 2020 г.
Директор _____ В. С. Мусинов
М.П.



Дополнительная образовательная программа математического объединения: второй год обучения

Возраст учащихся: 6-7 класс

Срок реализации программы: 1 год

Направленность: естественнонаучная

Авторы программы:

Ю.В. Богомолов,
старший преподаватель кафедры дискретного анализа
ФГБОУ ВПО ЯрГУ им. П.Г.Демидова;

С.Г. Волченков,
кандидат технических наук,
доцент кафедры вычислительных и программных систем
ФГБОУ ВПО ЯрГУ им. П.Г.Демидова;

И.С. Каценко,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического моделирования
ФГБОУ ВПО ЯрГУ им. П.Г.Демидова;

И.Е. Преображенский,
ассистент кафедры дифференциальных уравнений
ФГБОУ ВПО ЯрГУ им. П.Г.Демидова.

2020

г. Углич

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
Введение.....	3
Актуальность программы.....	4
Цель и задачи программы.....	4
Новизна и отличительные особенности программы.....	5
Педагогическая целесообразность программы.....	6
Целевая аудитория программы.....	6
Механизмы реализации программы.....	6
Сроки реализации программы и режим занятий.....	7
Предполагаемые результаты.....	7
Формы обучения и контроля.....	8
УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН	9
Тематические разделы.....	9
Разделы программы и формы обучения. Учебно-тематический план.....	10
СОДЕРЖАНИЕ КУРСА	12
МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	17
Математические соревнования.....	17
Письменная личная математическая олимпиада.....	17
Устная личная математическая олимпиада.....	17
Устная командная математическая олимпиада.....	18
Математический хоккей.....	18
Математическая карусель.....	19
Математическая абака.....	20
Математическая регата.....	21
Математический брейн-ринг.....	21
Математический аукцион.....	22
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	23
Учебно-методическая литература.....	23
Сборники задач.....	24

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Введение

В настоящее время математика является неотъемлемой частью личной и профессиональной компетенции, лежит в основе логического и аналитического стиля мышления, а также представляет собой неотъемлемый компонент многовековой общечеловеческой культуры. Это позволяет выдвигать в качестве одной из наиболее важных задач системы образования повышение доступности многоуровневого математического образования, позволяющего удовлетворить разнообразные индивидуальные образовательные потребности и в целом способствующего развитию математических компетенций.

Важной идеей при построении эффективной схемы организации дополнительного математического образования, ориентированной и на широкий охват потенциальной целевой аудитории, и на удовлетворение индивидуальных потребностей, является многоуровневость, позволяющая решать различные образовательные задачи и выбирать тот уровень дополнительного образования, который соответствует возможностям, интересам и текущему уровню образованности школьника.

Одним из компонентов практической реализации данной идеи является организация математических занятий со школьниками в рамках широкой сети математических объединений. Такие занятия уже были организованы для школьников 5-6 классов по программе первого года обучения, и наиболее важным шагом к развитию системы дополнительного образования является продолжение работы педагогов и школьников. Отметим, что, как и при работе со школьниками первого года обучения, наиболее важным является ознакомление школьников с общими (общематематическими) принципами решения математических задач, возможно с демонстрацией этих принципов на более сложных задачах. Также в рамках занятий второго года обучения школьники закрепляют изученные идеи, методы, принципы решения задач, изучают новые разделы математики, на углубленном уровне осваивают ранее рассмотренные области математического знания.

Как уже отмечалось, ключевая роль при реализации программы дополнительного образования отводится самостоятельному решению задач, в том числе нестандартных, новых, неожиданных. Это обеспечивает активный, деятельностный приоритет (в отличие от пассивного запоминания фактов), свойственный для математического образования. Знакомство с нестандартными математическими задачами и идеями мотивирует личность учащегося к познанию и творчеству, создают положительный образ математики и математического творчества, а занятия в рамках системы дополнительного образования создают благоприятные условия для развития личности ребенка, его самореализации, культурного самоопределения и интеграции в систему мировой культуры.

Актуальность программы

Актуальность программы в первую очередь обусловлена необходимостью поддержки наиболее способных учеников средних классов школ Угличского района, потенциально имеющих естественнонаучные наклонности. Также программа решает задачи выявления школьников, интересующихся математикой и естественнонаучными дисциплинами, и привлечения их к систематическим занятиям в системе дополнительного образования. Сложности в плане практической реализации программы обусловлены ограничением возможности у учащихся общеобразовательных школ, расположенных в населенных пунктах, удаленных от научных центров, углубленно (и даже просто дополнительно) заниматься математикой. Поэтому предложенная программа в первую очередь должна обеспечивать доступность дополнительного математического образования, возможность развертывания локальных математических объединений, создания на базе этих объединений условий для развития школьников, поддержки их интереса к математике и другим естественнонаучным дисциплинам и областям знания.

Цель и задачи программы

Цель программы - создание условий для творческого, интеллектуального развития, воспитания общей и математической культуры, формирования профессиональных компетенций, создания базы для более эффективного изучения предметов естественнонаучного цикла.

Для достижения поставленной цели необходимо решение ряда образовательных, воспитательных и развивающих задач.

1. Образовательные задачи:

– формирование и развитие у учащихся интереса к математике и в целом к естественнонаучным знаниям; активизация познавательной деятельности;

– углубление и расширение знаний учащихся по математике;

– формирование математического аппарата как средства описания и сложных в систематически нестандартного, научных понятиях исследования окружающего мира;

– развитие способности глубоко, самостоятельно разбираться в математических проблемах;

– формирование и развитие основанного на глубоких мышления;

– формирование и закрепление представлений об основных принципах научности и доказательности в математике.

2. Воспитательные задачи:

– воспитание понимания роли математики в современном мире, осознания ее необходимости как элемента культуры, социальной, личной и профессиональной компетентности;

– развитие критичности мышления, воспитание самодисциплины, настойчивости, целеустремленности;

– воспитание математической культуры, в том числе как части общечеловеческой культуры.

3. Развивающие задачи:

– развитие логического, алгоритмического и эвристического мышления, необходимых для полноценного функционирования в современном обществе и являющихся основой профессиональных математических компетенций;

– развитие элементов алгоритмической культуры, пространственных представлений, интуиции, математического кругозора.

Перечисленные задачи, даже с учетом условного их разделения на три категории, предполагают комплексное их решение в рамках предложенной программы.

Новизна и отличительные особенности программы

Ключевой особенностью программы является объединение двух подходов: с одной стороны, нацеленность на широкий охват школьников, массовость и доступность, но при этом в основе содержательной части программы лежат специфические тематические разделы, не затрагиваемые в школьном курсе математики, но имеющие важное теоретическое и прикладное значение. Иначе говоря, это попытка перенести основную структуру существующих программ дополнительного образования для высокомотивированных школьников с высоким начальным уровнем (и прошедших некоторый начальный отбор), на более широкую целевую аудиторию учащихся, заинтересованных в дополнительных занятиях математикой.

Второй особенностью является распределенность и чередуемость наиболее крупных и важных содержательных блоков в структуре программы. С учетом объективных возрастных особенностей предполагаемой аудитории программы разумным выглядит сознательный отказ от длительного изучения одной темы, приводящего к снижению заинтересованности и включенности учащихся. Вместо этого адекватным решением является разбиение крупного тематического раздела на более мелкие содержательные учебные модули и распределение их по учебно-тематическому плану. Это позволит активизировать интерес к содержанию программы (учащиеся увидят содержательное разнообразие математики, смогут переключаться с одного тематического раздела на другой) и при этом периодически актуализировать полученные ранее знания.

Программа составлена на основании Дополнительной образовательной программы математических объединений: второй год обучения (авторы: Богомолов Ю. В., Волченков С. Г., Кащенко И. С., Преображенский И. Е.). – Ярославль, 2014.

Педагогическая целесообразность программы

Программа ориентирована на продолжение реализации основных подходов к дополнительному математическому образованию школьников, заложенных в программе первого года обучения.

Программа естественным образом дополняет школьный курс обучения, ориентируясь в большей степени не на алгоритмичность работы с математическими структурами и выполнения математических операций, а на изучение общих методов, идей и принципов решения математических задач.

Программа включает новые области знаний, расширяющие кругозор и дающие представления о системе естественнонаучных знаний и об основных принципах научности.

Программа стимулирует инициативу и самостоятельность учащихся, в умственном и личностном развитии способствует реализации и развитию творческих способностей, соответствует познавательным интересам и индивидуальным образовательным запросам учащихся.

Целевая аудитория программы

Программа в первую очередь рассчитана на интересующихся математикой учащихся 6–7 классов общеобразовательных учреждений, прошедших программу первого года обучения. В то же время структура и содержание программы предполагают относительно мягкие требования к начальному уровню обучающихся, что облегчает вовлечение в процесс обучения по данной программе тех школьников, которые по различным причинам не прошли программу первого года (безусловно, процесс такого включения в работу соответствующего математического объединения будет успешным при должной мотивации обучающегося, а также при хорошем уровне освоения школьной программы 1–5 или 1–6 классов средней школы).

Реализация программы предполагает наличие хорошего уровня начальной математической подготовки в объеме программы общеобразовательной школы для соответствующего возраста, а также умения логически рассуждать. Программа ориентирована на подготовку школьников к реальной практической деятельности, научно исследовательской работе, на создание своеобразной коммуникативной среды, способствующей саморазвитию и реализации творческого потенциала.

Механизмы реализации программы

Предлагаемая программа предусматривает:

- теоретические занятия;
- практические занятия,
- самостоятельные занятия школьников.

Теоретические занятия состоят из лекций и самостоятельной работы с теоретическим материалом. В основе практических занятий лежит индивидуальное выполнение различных заданий, преимущественно направленных на решение математических задач, а также проведение групповых обсуждений и консультаций. Также практическая составляющая обогащена активными формами обучения, участием школьников в личных математических соревнованиях, имитирующих научно-исследовательскую деятельность и прививающих умения и навыки, свойственные будущей научной работе. Усиление научного содержания программы требует также систематического использования исследовательского метода в обучении, его следует рассматривать как такую организацию занятий, при которой учащиеся осознают огромную значимость изучаемой проблемы, пользуются методами, понятиями для решения поставленной проблемы.

В основу реализации данной программы положены следующие основные принципы:

– изучение новых областей математики, овладение научными умениями и навыками производится в предположении строгой логической обоснованности переходов от одного раздела математики к другому, что составляет принцип систематичности и последовательности;

– в ходе занятий учащимся сообщаются знания, основанные на проверенных и обоснованных положениях, фактах, теориях, что является основной составляющей принципа научности;

– принцип сознательности и активности, предполагающий понимание учащимися смысла усваиваемой информации, понимание цели и значимости учебной деятельности.

Сроки реализации программы и режим занятий

Продолжительность обучения по программе составляет 1 год. Предусмотренная программой нагрузка для полного успешного прохождения базового курса второго года обучения составляет 2 часа в неделю. Увеличение нагрузки возможно за счет проведения дополнительных курсов, реализованных в виде дополнительных занятий или математических соревнований.

Предполагаемые результаты

Предполагаемыми результатами реализации программы являются:

– развитие интереса к математике, активизация систематических познавательной продолжению деятельности, дополнительных интерес к занятиям математикой;

– формирование математических компетенций, овладение новыми идеями и методами решения математических задач;

– развитие первичных навыков научной математической деятельности;

- повышение общего интеллектуального и математического уровня обучающихся;
- развитие математической интуиции, логического мышления, формирование и развитие математической культуры;
- формирование умений адекватного и эффективного применения изученных методов и принципов в решении практических задач, а также умения представления достигнутых результатов в сочетании с их обсуждением.

Формы обучения и контроля

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным и методическим материалом.

Предполагаются следующие формы организации обучения:

- индивидуальная, групповая, коллективная;
- взаимное обучение, самообучение, саморазвитие.

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля:

- текущий контроль,
- итоговый контроль.

Программой предусмотрено проведение лекционных, практических занятий, выполнение контрольных работ, проведение математических соревнований. Текущий контроль усвоения материала осуществляется на основе проверочных, контрольных работ, тестов. Предусматривается дифференцированный итоговый контроль: итоговая контрольная работа, очный зачет, математические олимпиады различного уровня.

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тематические разделы

Программа первого года обучения предполагает изучение следующих основных тематических разделов:

1. Общие принципы решения математических задач

Актуализируется понимание основных идей, подходов, методов и принципов решения математических задач: логический вывод, перебор вариантов, примеры и контрпримеры, выдвижение предположений и получение противоречия, метод доказательства от противного.

2. Текстовые задачи

Рассматриваются текстовые задачи без явно выраженной общей идеи. Применяются общие принципы решения математических задач.

3. Логика

Закрепление основных принципов решения математических задач на примере логических заданий, изучение логических операций (в рамках алгебры высказываний).

4. Основы теории чисел: делимость и остатки

Свойства делимости чисел, разложение чисел на множители, простые и составные числа, совершенные числа, общие делители, НОД и НОК, свойства остатков от деления и арифметические операции над остатками. Введение в систему счисления.

5.

Обсуждение свойств

Обсуждение свойств арифметических неравенств, операций над неравенствами. Решение задач на доказательство неравенств.

6. Принцип Дирихле

Актуализация основных идей применения принципа Дирихле при решении математических задач. Решение задач из арифметики, алгебры, теории чисел, комбинаторики с помощью принципа Дирихле.

7. Теория игр

Повторяются основные идеи, используемые в игровых задачах: понятие антагонистической игры, хода, выигрышной позиции, стратегии. Предлагаются подходы к поиску выигрышных стратегий: различные варианты симметричных стратегий, анализ выигрышных позиций, метод анализа с конца при поиске выигрышных позиций.

8. Основы теории графов

Вводится понятие графа как математической модели объектов, рассматриваемых в задаче, и связей между этими объектами. Обсуждаются основные понятия теории графов.

9. Комбинаторика

Повторение основных комбинаторных методов: полный перебор, построение дерева вариантов, упорядочение перебора, вариантов, правила сложения и умножения вариантов. Введение в стандартные комбинаторные схемы выбора (подсчета): перестановки, размещения и сочетания без повторений.

10. Введение в геометрию

Длины, расстояния, площади. Неравенство треугольника.

11. Инвариант

Повторение понятия инварианта. Инварианты, связанные с четностью и делимостью, знакопостоянством и знакочередуемостью, с раскраской и разбиением на группы.

12. Математические соревнования

Участие в командных и личных математических соревнованиях: математическом аукционе, математическом хоккее, карусели, регате, абаке. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.

Описанные тематические разделы разделяются на подразделы (учебные модули) и распределяются по учебно-тематическому плану в зависимости от выбора текущего варианта плана (образовательной траектории).

Разделы программы и формы обучения. Учебно-тематический план

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
1.	Общие принципы решения математических задач	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
2.	Текстовые задачи: модуль 1	2	0	2	Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа
3.	Логика	2	1	1	Индивидуальный опрос, обсуждение
4.	Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 1	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
5.	Арифметические неравенства	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение
6.	Математические соревнования: модуль 1	2	0	2	Математическое соревнование
7.	Принцип Дирихле: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
8.	Теория игр: модуль 1	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение
9.	Основы теории графов: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
10.	Комбинаторика: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос

11.	Инвариант	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение
12.	Математические соревнования: модуль 2	2	0	2	Математическое соревнование
13.	Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 2	2	1	1	Проверочная работа
14.	Принцип Дирихле: модуль 2	2	0	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
15.	Комбинаторика: модуль 2	4	2	2	Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение
16.	Текстовые задачи: модуль 2	2	0	2	Проверочная работа
17.	Основы теории графов: модуль 2	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа
18.	Теория игр: модуль 2	2	1	1	Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение
19.	Введение в геометрию	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение
20.	Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 3	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа
21.	Математические соревнования: модуль 3	2	0	2	Математическое соревнование
	ИТОГО	60	20	40	

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач

Содержание раздела:

- Полный перебор возможностей.
- Примеры и контрпримеры.
- Предположения, получение противоречия.
- Метод доказательства от противного.

Учащиеся повторяют с общие (общематематические) принципы решения математических задач, закрепляют понимание важности обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. Большое внимание уделяется решению задач на перебор случаев (ситуаций), выдвижение предположений, логический вывод и приведение к противоречию. Предлагаются задачи на полный перебор ситуаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез.

Тематический раздел 2. Текстовые задачи

Содержание раздела:

- Текстовые задачи на движение.
- Текстовые задачи на работу.
- Текстовые задачи на процессы и операции.

Данный раздел во многом дополняет повторение общих принципов решения задач: предлагаются задачи без явно выраженной общей идеи решения, в которых применяются общематематические идеи, методы, подходы. На занятиях с шестиклассниками или в группах с большим количеством новых участников рекомендуется рассмотрение текстовых задач, типичных (по структуре) для стандартного школьного курса – на движение, на работу, на подсчет объектов. В любом случае минимизировать количество задач, в которых предполагается совершенно стандартный ход или алгоритм решения.

Тематический раздел 3. Логика

Содержание раздела:

- Логический вывод, предположения, противоречия, метод от противного.
- Операции над высказываниями, свойства операций.
- Правила логического вывода.
- Упорядочение перебора вариантов: деревья вариантов, таблицы истинности.

Повторяются основные приемы работы с логическими конструкциями, такими как следствие, равносильность, необходимость, достаточность, существование, всеобщность. Логические понятия, связки, схемы рассуждения, общие принципы решения задач и доказательств, изученные ранее, закрепляются при решении практических задач. Рекомендуется большее

внимание (по сравнению с изучением аналогичной темы в предыдущем учебном году) уделить письменному изложению решений. Правила корректного логического вывода закрепляются при решении и обсуждении логических задач. Группам, обучающимся по вариантам тематического плана №2 и №3, можно формально изложить основные положения алгебры логики, но без какого-либо упора на терминологию: на примерах показать, как условие задачи переводится на формальный логический язык, продемонстрировать операции над высказываниями (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание), обсудить их свойства, показать способы обоснования логических утверждений и упорядочения перебора вариантов (построение таблицы истинности).

Тематический раздел 4. Основы теории чисел: делимость и остатки

Содержание раздела:

- Делимость и делители, кратность.
- Простые и составные числа. Разложение на простые множители.
- Основная теорема арифметики.
- Общие делители. Взаимно простые числа.
- Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Алгоритм Евклида.

- Остатки от деления. Арифметические свойства остатков.
- Основы систем счисления.

Учащиеся повторяют основные понятия, связанные с делимостью целых чисел, закрепляют понимание базовых свойств делимости. Особое внимание следует обратить на разложение составных чисел на простые множители, на основную теорему арифметики (о существовании и единственности разложения на простые множители). В старших группах можно предложить основную идею строгого доказательства данной теоремы, а также продемонстрировать, как из неё вытекают основные свойства делимости.

При решении задач учащиеся повторяют простейшие признаки делимости, закрепляют навык их использования для эффективного поиска делителей числа и разложения натурального числа на простые множители. Закрепляются навыки поиска общих делителей чисел, предлагается алгоритм Евклида для нахождения НОД, в группе семиклассников желательно провести строгое обоснование алгоритма.

Свойства остатков сначала демонстрируются на арифметических примерах, после этого важно провести строгое доказательство используемых свойств, на их примере также продемонстрировав и структуру доказательства теоретико-числовых свойств, и способ записи доказательств. Также важно уделить внимание свойству цикличности остатков при возведении целых чисел в степень, а также изучению свойств остатков от деления квадратов, кубов и других степеней натуральных чисел на 3, 4 и прочие делители.

С группой семиклассников также допустимо рассмотреть основные понятия, связанные с позиционными системами счисления, предложить один из возможных алгоритмов перевода чисел из десятичной системы счисления в другую позиционную систему счисления и обратно.

Тематический раздел 5. Арифметические неравенства

Содержание раздела:

- Сравнение чисел
- Числовые неравенства, их основные свойства

На примере задач на сравнение целых чисел и арифметических выражений учащимся демонстрируются основные свойства алгебраических неравенств (в первую очередь транзитивность, а также возможность складывать или перемножать неравенства при соблюдении некоторых условий). При изучении свойств неравенств полезно также продемонстрировать или попросить учащихся построить контрпримеры, показывающие недопустимость переноса некоторых свойств равенств на неравенства (например, для демонстрации недопустимости вычитания неравенств), а также невыполнимость некоторых арифметических свойств неравенств при неполном соблюдении условий для выполнения соответствующего свойства.

Тематический раздел 6. Принцип Дирихле

Содержание раздела:

- Принцип Дирихле в арифметических задачах.
- Принцип Дирихле в комбинаторных задачах.
- Принцип Дирихле в теории чисел.

При изучении (повторении) данной темы рекомендуется упор сделать в первую очередь на решении задач и обсуждении особенностей применения принципа Дирихле (если этого не сделали учащиеся, то после предоставленного решения обсудить, что в конкретном решении задачи является «кроликами», а что – «клетками»). При решении арифметических и теоретико-числовых задач с использованием принципа Дирихле повторяются свойства делимости и остатков, которые органично используются как этапы доказательств и решений задач.

Тематический раздел 7. Теория игр

Содержание раздела:

- Стратегии, выигрышная стратегия, правильная игра.
- Игры на клетчатой доске.
- Симметричные стратегии.
- Выигрышные позиции, поиск и анализ выигрышных позиций с конца.

Учащиеся по предыдущему году обучения уже знакомы с понятием математической антагонистической игры, выигрышной стратегии, правильной игры. Поэтому при работе с данным тематическим разделом приоритетнее уделить особое внимание изучению методов целенаправленного поиска выигрышных стратегий.

В первую очередь можно рассмотреть серию задач на поиск симметричных стратегий (как в прямом – геометрическом – смысле, так и в переносном – в виде дополнения объектов до определенного количества). Интересно обратить внимание на задачи, где при незначительном изменении условия перестает работать уже найденная симметричная стратегия, зато

возникает другой вид симметрии и соответствующая выигрышная стратегия. Особенно важно обращать внимание учащихся на необходимость обоснования двух важных составных частей найденной стратегии: возможности для игрока действительно совершать ходы, предусмотренные выбранной стратегией (избегая при этом ошибки, когда соперник неявно «подыгрывает» игроку, возможно мотивируя это «наиболее удобным» вариантом сделать ответный ход).

В качестве достаточно универсального средства поиска выигрышных стратегий следует обратить внимание учащихся на понятие выигрышной позиции и метод анализа выигрышных «с конца». Наиболее наглядно данный метод демонстрируется на примере игровых задач на шахматной доске.

Тематический раздел 8. Основы теории графов

Содержание раздела:

- Графы как математическая модель.
- Основные понятия теории графов.
- Связность графов, компоненты связности.
- Степени вершин и закономерности, связанные с ними.

Обсуждается эффективность представления связанной с задачей системы в схематической форме с помощью графов. На примерах иллюстрируется способ представления объектов задачи и взаимосвязей между ними в виде вершин и ребер графа, обсуждается возможность существования общих способов решения конкретных задач при их интерпретации в виде графовых моделей.

Вводятся основные определения теории графов (вершины, ребра, смежность, инцидентность, путь). Введенные понятия развернуто иллюстрируются на конкретных примерах, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов.

Тематический раздел 9. Комбинаторика

Содержание раздела:

- Основные правила подсчета количества комбинаций.
- Схемы комбинаторного выбора: перестановки, размещения, сочетания.
- Свойства перестановок и сочетаний.

Учащимся демонстрируется необходимость полного рассмотрения вариантов в переборных задачах, обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций. Обсуждаются способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения.

Особое внимание уделяется изучению правил сложения и умножения вероятностей, формируется умения правильно применять данные законы. Способ подсчета перестановок предварительно демонстрируется на простейших задачах с использованием полного перебора, после чего на задачах с большим количеством элементов обсуждается неконструктивный способ подсчета количества комбинаций, в результате выводится общая

формула подсчета количества перестановок, навык использования которой закрепляется при решении задач. Старшим рекомендуется также дать общее представление о размещениях и сочетаниях (со строгим выводом формул и комбинаторным обоснованием их основных свойств).

Тематический раздел 10. Введение в геометрию

Содержание темы:

- Длины, расстояния, площади.
- Неравенство треугольника.

Младшие участники кружка при повторении данной темы могут поработать с задачами на разрезание, на понятие равновеликих и равносторонних фигур (при этом полезно ознакомить учащихся с методом сравнения площадей плоских фигур с помощью идей равносторонности). Для более старших детей полезнее обратить особое внимание на геометрические задачи, доказательство в которых производится с помощью неравенства треугольника. Семиклассникам во второй половине учебного года при изучении данной темы рекомендуется предлагать геометрические задачи и на более широкий спектр геометрических методов.

Тематический раздел 11. Инвариант

Содержание темы:

- Инварианты, связанные с четностью, делимостью и остатками.
- Инварианты, связанные с раскраской и разбиениями на группы.

Повторяется основная идея доказательства математических утверждений с помощью инвариантов, закрепляется навык поиска инвариантов в изменяющейся системе, выбора из них необходимого для решения поставленной задачи. Решение задач на инварианты, связанные с делимостью и остатками, также полезно для закрепления соответствующих понятий, свойств и закономерностей в тематическом блоке «Основы теории чисел». При решении задач на исследование инвариантов, связанных с раскраской, учащиеся повторяют различные виды раскрасок и разбиения на группы (шахматные раскраски, раскраски в три или большее количество цветов, диагональные раскраски), приобретают опыт применения идеи инварианта в различных ситуациях.

В сильных группах можно явно или неявно ввести понятие полуинварианта (как монотонно меняющейся характеристики) с закреплением данного понятия через решение соответствующих задач.

Тематический раздел 12. Математические соревнования

Содержание темы:

- Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абаки.
- Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.
- Проведение соревнований.

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Учащиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Математические соревнования

Существует достаточно много различных форм внеурочной деятельности. Широкое распространение получили математические олимпиады различных уровней, проводимые с целью привлечения способных школьников к занятию математикой. Также достаточно популярными являются такие виды состязаний как математические аукционы, брейн-ринги, викторины, математические регаты и «математические драки».

Как правило, математические соревнования включают в себя индивидуальную или групповую работу над решением интересных нестандартных задач, письменное или устное изложение решения, прямое взаимодействие с другими участниками или членами жюри. Ряд математических соревнований формируют умения поиска ошибок и недочетов в предложенном решении (например, оппонирование на математическом бое), оценку трудности задач (с целью выбора правильной игровой стратегии на математическом аукционе или математическом бое), анализ своих сильных и слабых сторон (например, в ходе математической регаты), отрабатывают навыки письменной и устной монологической речи, а также формируют важные черты математической культуры и прививают навыки ведения научной дискуссии.

Ниже приводятся правила наиболее распространенных личных и командных математических соревнований.

Письменная личная математическая олимпиада

Каждый участник получает комплект задач (как правило, от 4 до 6), которые решает в течение отведенного времени (3-4 часа; младшим школьникам рекомендуется отводить на решение задач 1,5-2 часа). Решения задач оформляются письменно и предоставляются на проверку членам жюри.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. В ходе проверки по каждой задаче соответственно выставляется от 0 до 7 баллов. Допускается и проведение олимпиады, в которой стоимость задач может отличаться. Общий итог подводится суммированием баллов.

Устная личная математическая олимпиада

Участникам предлагается комплект задач. Все задачи делятся на две группы «выводные» и «довыводные». Участник олимпиады, решивший 3 задачи из первой группы (на их решение отводится 2,5 часа), получает вторую группу задач и еще 1 час дополнительного времени.

Решив задачу (или несколько задач), школьник вызывается отвечать и рассказывает решение одному из членов жюри. Тот ищет ошибки и, если какие-то места в решении требуют более подробного объяснения, задает соответствующие вопросы. Отвечающий может исправлять и дополнять решение "на ходу", но если он не может сделать этого достаточно быстро (например, думает больше минуты), то засчитывается неверный подход. Всего участник может сделать не больше трех подходов по каждой задаче. Если он не смог рассказать решение за три попытки, то он лишается права отвечать эту задачу. При подведении итогов количество неверных подходов не учитывается.

Если принимающий счел решение правильным, то, оно засчитывается и школьник возвращается на место решать другие задачи. Так же каждое решение оценивается баллами (по каждой задаче от 1-го до 7-ми). Если школьник получил неполный балл по данной задаче (такое возможно, даже если решение признано верным) и у него остались подходы, он может исправить допущенные огрехи. "Подозрительные" решения перепроверяются жюри, и бывает (впрочем, не часто), что обнаруживается хитрая ошибка, не найденная во время ответа. Если олимпиада еще не закончил ась, то школьнику сообщают об ошибке и предлагают исправить или дополнить решение, а запись о его ответе аннулируется. После конца олимпиады изменения в протоколе уже невозможны, даже если выяснилось, что кто-то рассказал неверное решение.

Допускается использовать следующую систему оценки: решенная задача - 1 балл, нерешенная задача - 0 баллов, при этом номер подхода не учитывается. Также допускается варьировать количество довыводных и выводных задач и количество времени, отводимого на их решение.

При подведении итогов все баллы суммируются.

Устная командная математическая олимпиада

На каждую из команд выдается одинаковый комплект задач, которые она решает в течение отведенного промежутка времени (как правило, 3-4 часа).

Решение задачи представляется устно одним из членов команды, причем только одной судейской бригаде. При этом команде желательно иметь с собой необходимые для рассказа решения чертежи и выкладки. На изложение решения каждой задачи дается три попытки. Если все они использованы, а решение задачи не засчитано, то команда не может подходить с решением этой задачи. Каждый член команды может подходить с решениями не более чем двух различных задач. Если решение задачи предоставляется сначала одним игроком, а затем другим, то выходы засчитываются как одному игроку, так и другому. Победитель определяется по количеству решенных задач. В случае равенства количества решенных задач могут учитываться количество подходов и сложность решенных задач.

Математический хоккей

Математический хоккей - это командное соревнования по решению задач. Рисуются игровое поле, визуально напоминающее хоккейную площадку, на котором выделяются ключевые точки: центральное поле (средняя линия, центр

поля, зона центрального вбрасывания), зоны соперничающих команд, линии ворот. В начале игры шайба находится в центре поля. Задачи предлагаются по одной. Команда, верно решившая задачу первой, перемещает шайбу в сторону ворот соперников (по отмеченным на поле ключевым точкам). При этом, если шайба уже находится на линии ворот соперников, считается, что команда забила гол, а шайба переносится в центр.

Возможен вариант с разделением игроков соперничающих команд по ролям: игроки двух команд делятся на нападающих, защитников и вратаря. После решения каждой задачи шайба перемещается в сторону ворот проигравшей команды. Если вратарь проигрывает нападающим, то забивается гол, и шайба возвращается в центр поля.

Математическая карусель

Математическая карусель - это командное соревнования по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах - исходном и зачетном, но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение судье. Если оно верное, игрок №2 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, решение предъявляет судье игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный, а на зачетном возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного переходит на исходный. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. И на исходном, и на зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной.

После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задача начинает решаться тогда, когда этот участник там появляется.

За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно

решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если

а) кончилось время, или

б) кончились задачи на зачетном рубеже, или

в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговаривается.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

Математическая абака

Математическая абака (математический квадрат) - это командная игра-соревнование по решению задач. Все задачи выдаются для решения всем командам одновременно. Основным зачётным показателем в математической абаке является общее количество набранных очков (включая бонусы). В случае равенства очков у нескольких команд более высокое место занимает команда, имеющая большую сумму бонусов. При равенстве и этого показателя команды считаются разделившими места.

Решение задач. Каждой команде предлагается для решения 6 тем по 6 задач в каждой теме. Задачи каждой темы сдаются по порядку, от 1-й до 6-й (например, у команды не примут ответ на 4-ю задачу, пока она не сдала ответы на задачи 1, 2 и 3). На каждую задачу отводится один подход (одна попытка сдать ответ). Если команда предъявила правильный ответ на задачу, она получает за это цену задачи, а если неправильный или неполный - 0 очков. В некоторых задачах по усмотрению жюри цена задачи может быть поделена поровну между всеми возможными ответами, в этом случае каждый найденный ответ приносит команде соответствующую часть цены. Для каждой такой задачи это указывается в ее условии.

Цена первой задачи каждой темы – 10 очков, второй - 20, ... , шестой - 60 очков. (Таким образом, не считая бонусов, команда может заработать за решение задач до $6 \cdot 210 = 1260$ очков.)

Основные бонусы. Каждая команда дополнительно может заработать бонусные очки:

– За правильное решение всех задач одной темы («бонус-горизонталь») - 50 очков

– За правильное решение задач с одним и тем же номером во всех темах («бонус-вертикаль») - цену задачи с этим номером

Бонусы за первое решение. Первые команды, получившие каждый из шести возможных бонус-горизонталей и каждый из шести бонус-вертикалей, получают их в двойном размере.

Окончание игры. На решение задач отводится 90 минут.

Игра для команды оканчивается, если у нее кончились задачи или истекло общее время, отведенное для игры.

Математическая регата

В регате участвует некоторое количество команд. В составе каждой команды - 4 человека. Соревнование проводится в четыре тура. Каждый тур представляет собой коллективное письменное решение трех задач. Любая задача оформляется и сдается в жюри на отдельном одинарном листе, причем каждая команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач.

Проведением регаты руководит Координатор. Он организует раздачу заданий и сбор листов с решениями; проводит разбор решений задач и обеспечивает своевременное появление информации об итогах проверки.

Время, отведенное командам для решения, и стоимость задач каждого тура в баллах указаны на листах с условиями задач, которые каждая команда получает непосредственно перед началом каждого тура.

Параллельно с ходом проверки, Координатор осуществляет для учащихся разбор решений задач, после чего школьники получают информацию об итогах проверки. После объявления итогов тура, команды, не согласные с тем, как оценены их решения, имеют право подать заявки на апелляции

Команды-победители и призеры регаты определяются по сумме баллов, набранных каждой командой во всех турах.

Математический брейн-ринг

В игре участвуют 4-6 команд по 4-6 человек. Команды рассаживаются в аудитории. Каждая команда выбирает себе капитана. Ведущий оглашает условие задачи, её стоимость в баллах и время на решение этой задачи (время подготовки).

В течение времени подготовки команды пытаются решить задачу. Если в течение времени подготовки капитан какой-то команды поднял руку, то к доске немедленно выходит один из членов данной команды. Если подняли руки несколько капитанов, то к доске выходит член команды, капитан которой поднял руку первым. Спорные ситуации разрешаются жюри.

Вышедший к доске игрок ждет окончания времени подготовки. Он не может общаться с командой до конца рассказа решения. По окончании времени подготовки команды, кроме той, представитель которой находится у доски, сдают в жюри письменные решения задачи. От каждой команды принимается к рассмотрению только одно решение. После сдачи письменных решений игрок,

находящийся у доски, рассказывает своё решение задачи. Жюри по ходу рассказа и после него задаёт вопросы и делает замечания.

Письменные решения оцениваются жюри, исходя из объявленной стоимости задачи. При выходе члена команды к доске с команды автоматически снимается стоимость задачи. Рассказанное у доски решение оценивается, исходя из удвоенной стоимости задачи. Оглашается счет по задаче. Если задачи не исчерпаны, описанная выше процедура повторяется.

Итог подводится по суммарному числу набранных баллов.

Математический аукцион

Соревнование также известно под названием «математическая драка».

Участие в соревновании индивидуальное. Ведущий предлагает задачи по одной, объявляя ее стоимость в баллах и отводимое для ее решения время. Если в течение отведенного времени один из участников сигнализирует о решении задачи поднятием руки, то решение выслушивается, после чего задача признается либо решенной, либо нерешенной (в том случае, если есть какие-либо недочеты). В том случае, если задача решена, то участник получает заявленное количество баллов, и обсуждение данной задачи прекращается. Если задача не решена, то она остается в розыгрыше (при этом выступившие по данной задаче участники не имеют права предоставлять новое решение).

Если в течение отведенного времени задача не решена ни одним из участников, ведущий может поднять стоимость задачи и добавить время на ее решение; эта операция может повторяться для данной задачи неоднократно (при этом ведущий заранее объявляет процедуру увеличения стоимости).

Данная процедура повторяется для каждой из вынесенных на аукцион задач. Итог подводится по общему количеству набранных каждым участником баллов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Учебно-методическая литература

1. Блинков А. Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. - М.: МЦНМО, 2012
2. Богомолов Ю. В., Волченков С. Г., Кащенко И. С., Преображенский И. Е. Дополнительная образовательная программа математических объединений: второй год обучения. – Ярославль, 2014
3. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. - М.: Физматгиз, 1961.
4. Верещагин Н. К., Шень А. Х. Начала теории множеств. - М.: МЦНМО, 2002.
5. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. - М.: МЦНМО, 2005.
6. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. - М.: Наука, 1978.
7. Генкин С. А., Интенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. - Киров: Аса, 1994.
8. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. - М.: Наука, 1972.
9. Евдокимов М. А. От задачек к задачам. - М.: МЦНМО, 2004.
10. Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. - М., МЦНМО, 2002.
11. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. - М.: МЦНМО, 1997.
12. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. - М.: МЦНМО, 2011
13. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. - М., МЦНМО, 2004.
14. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. - М., ГИФМЛ, 1958.
15. Кэрролл Л. Логическая игра. - М.: Наука, 1991.
16. Левин А. Ю. Что такое комбинаторика. - М.: «Квант», 1999 г., № 5, 6
17. Муштари Д. Х. Подготовка к математическим олимпиадам. - Казань, 1990.
18. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. - М.: Наука, 1974.
19. Спивак А. В. Математический праздник. - М.: МЦНМО, 1995.
20. Толпыго А. К. Инварианты. - «Квант», 1976, №12.
21. Тригг Ч. Задачи с изюминкой.
22. Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н. Иллюстративная геометрия. - М., 1992.
23. Шень А. Х. Игры и стратегии с точки зрения математики - М.: МЦНМО, 2007.
24. Шень А. Х. Простые и составные числа - М.: МЦНМО, 2005.
25. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.

Сборники задач

1. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до] 5 лет М.: МЦНМО, 2007.
2. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М., Наука, 1975.
3. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. Московские математические регаты. - М.: МЦНМО, 2007.
4. Бугаенко В. О. Турниры им. Ломоносова. - М.: МЦНМО, 1998.
5. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1. - М.: Бюро Квантум, 2010.
6. Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. - М.: МЦНМО, 2004.
7. Математические бои. Материалы XIII областного турнира. Методическое пособие. - Ярославль: ГУ ЦОШ «Олимп», 2007
8. Математические бои. Материалы XIV областного турнира. Методическое пособие. - Ярославль: ГУ ЦОШ «Олимп», 2008
9. Математические турниры им. А. П. Савина. Составитель А.В. Спивак. - М.: Бюро Квантум, 2006
10. Произволов В. В. Задачи на вырост - М.: МИРОС, 1995.