

Департамент образования Ярославской области  
Государственное образовательное бюджетное учреждение  
дополнительного образования детей Ярославской области  
«Ярославский региональный инновационно-образовательный центр  
«НОВАЯ ШКОЛА»

**Дополнительная образовательная программа  
математических объединений: первый год обучения**

Ярославль  
2014

УДК 37+51

ББК 74

Д 68

**Рецензент:**

доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой теории и методики обучения математике ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

*А. В. Ястребов*

**Д 68** **Дополнительная образовательная программа математических объединений:** Первый год обучения. – Ярославль, 2014. – 39 с.

Настоящая дополнительная образовательная программа предназначена для педагогов, осуществляющих обучение школьников 5-6 классов в рамках математических объединений. Программа направлена не на углубление школьного курса математики для данной возрастной группы, а на изучение дополнительных разделов математики и развитие разнообразных математических компетенций. Особое внимание в каждом тематическом разделе программы уделяется изучению общих методов, подходов, идей решения математических задач.

Предложенная программа сохраняет основную структуру программ дополнительного образования для высокомотивированных школьников, но при этом рассчитана на более широкую целевую аудиторию учащихся, заинтересованных в дополнительных занятиях математикой.

УДК 37+51

ББК 74

**Авторы программы:**

старший преподаватель кафедры дискретного анализа ФГБОУ ВПО ЯрГУ им. П.Г.Демидова *Ю.В. Богомолов*;

кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительных и программных систем ФГБОУ ВПО ЯрГУ им. П.Г.Демидова *С.Г. Волченков*;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования ФГБОУ ВПО ЯрГУ им. П.Г.Демидова *И.С. Кащенко*;

ассистент кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО ЯрГУ им. П.Г.Демидова *И.Е. Преображенский*

© Авторы программы, 2014

© ГОБУ ДОД ЯО «Ярославский региональный инновационно-образовательный центр «Новая школа», 2014

## Содержание

<b>ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА</b> .....	<b>4</b>
Введение .....	4
Актуальность программы .....	5
Цель и задачи программы .....	6
Новизна и отличительные особенности программы .....	7
Педагогическая целесообразность программы .....	8
Целевая аудитория программы .....	8
Механизмы реализации программы .....	9
Сроки реализации программы и режим занятий .....	10
Предполагаемые результаты .....	10
Формы обучения и контроля .....	11
<b>УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН</b> .....	<b>12</b>
Структура .....	12
Тематические разделы .....	13
Разделы программы и формы обучения .....	16
<i>Учебно-тематический план №1: 5 класс</i> .....	<i>16</i>
<i>Учебно-тематический план №2: 5-6 класс</i> .....	<i>18</i>
<i>Учебно-тематический план №3: 6 класс</i> .....	<i>20</i>
<b>СОДЕРЖАНИЕ КУРСА</b> .....	<b>23</b>
<b>МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ</b> .....	<b>30</b>
Математические соревнования .....	30
<i>Письменная личная математическая олимпиада</i> .....	<i>30</i>
<i>Устная личная математическая олимпиада</i> .....	<i>31</i>
<i>Устная командная математическая олимпиада</i> .....	<i>32</i>
<i>Математический хоккей</i> .....	<i>32</i>
<i>Математическая карусель</i> .....	<i>33</i>
<i>Математическая абака</i> .....	<i>34</i>
<i>Математическая регата</i> .....	<i>35</i>
<i>Математический брейн-ринг</i> .....	<i>36</i>
<i>Математический аукцион</i> .....	<i>37</i>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	<b>38</b>
Учебно-методическая литература .....	38
Сборники задач .....	39

## **Пояснительная записка**

### **Введение**

В настоящее время математика является неотъемлемой частью личной и профессиональной компетенции, лежит в основе логического и аналитического стиля мышления, а также представляет собой неотъемлемый компонент многовековой общечеловеческой культуры. Это позволяет выдвигать в качестве одной из наиболее важных задач системы образования повышение доступности многоуровневого математического образования, позволяющего удовлетворить разнообразные индивидуальные образовательные потребности и в целом способствующего развитию математических компетенций.

Важной идеей при построении эффективной схемы организации дополнительного математического образования, ориентированной и на широкий охват потенциальной целевой аудитории, и на удовлетворение индивидуальных потребностей, является многоуровневость, позволяющая решать различные образовательные задачи и выбирать тот уровень дополнительного образования, который соответствует возможностям, интересам и текущему уровню образованности школьника.

Одним из компонентов практической реализации данной идеи является организация математических занятий со школьниками 5–6 классов в рамках широкой сети математических объединений. Основной направленностью занятий первого года обучения является ознакомление школьников с общими принципами решения математических задач, а также формирование необходимой базы для изучения новых, неизвестных им разделов математики (в особенности тех, которые не затрагиваются в программе средней школы).

Согласно Концепции развития российского математического образования, ключевая роль здесь отводится самостоятельному решению задач, в том числе нестандартных, новых, неожиданных. Это обеспечивает активный, деятельностный приоритет (в отличие от пассивного запоминания фактов), свойственный для математического

образования. Знакомство с нестандартными математическими задачами и идеями мотивирует личность учащегося к познанию и творчеству, создают положительный образ математики и математического творчества, а занятия в рамках системы дополнительного образования создают благоприятные условия для развития личности ребенка, его самореализации, культурного самоопределения и интеграции в систему мировой культуры.

### **Актуальность программы**

Взросшая роль математических знаний, логического стиля мышления, математической культуры, стремительная математизация и информатизация многих сфер человеческой деятельности, требует уделить особое внимание математическому образованию школьников уже с младших классов. Развитие математических компетенций школьников, их специфических логических и алгоритмических навыков, умственной (в том числе, математической) культуры будет наиболее эффективным при соответствующей поддержке, которую школьник получает в системе дополнительного образования.

Актуальность программы в первую очередь обусловлена необходимостью выявления и поддержки наиболее способных учеников средних классов школ Ярославля и Ярославской области, потенциально имеющих естественнонаучные наклонности. Сложности в плане практической реализации программы обусловлены ограничением возможности у учащихся общеобразовательных школ, расположенных в населенных пунктах, удаленных от научных центров, углубленно (и даже просто дополнительно) заниматься математикой. Поэтому предложенная программа в первую очередь должна обеспечивать доступность дополнительного математического образования, возможность развертывания локальных математических объединений, создания на базе этих объединений условий для развития школьников, поддержки их интереса к математике и другим естественнонаучным дисциплинам и областям знания.

## **Цель и задачи программы**

**Цель программы** – создание условий для творческого, интеллектуального развития, воспитания общей и математической культуры, формирования профессиональных компетенций, создания базы для более эффективного изучения предметов естественнонаучного цикла.

Для достижения поставленной цели необходимо решение ряда образовательных, воспитательных и развивающих задач.

### **1. Образовательные задачи:**

- формирование и развитие у учащихся интереса к математике и в целом к естественнонаучным знаниям; активизация познавательной деятельности;
- углубление и расширение знаний учащихся по математике;
- формирование математического языка и математического аппарата как средства описания и исследования окружающего мира;
- развитие способности глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- формирование и развитие нестандартного, основанного на глубоких научных понятиях мышления;
- формирование и закрепление представлений об основных принципах научности и доказательности в математике.

### **2. Воспитательные задачи:**

- воспитание понимания роли математики в современном мире, осознания ее необходимости как элемента культуры, социальной, личной и профессиональной компетентности;
- развитие критичности мышления, воспитание самодисциплины, настойчивости, целеустремленности;
- воспитание математической культуры, в том числе как части общечеловеческой культуры.

### **3. Развивающие задачи:**

- развитие логического, алгоритмического и эвристического мышления, необходимых для полноценного функционирования в современном обществе и являющихся основой профессиональных математических компетенций;
- развитие элементов алгоритмической культуры, пространственных представлений, интуиции, математического кругозора.

Перечисленные задачи, даже с учетом условного их разделения на три категории, предполагают комплексное их решение в рамках предложенной программы.

## **Новизна и отличительные особенности программы**

Ключевой особенностью программы является объединение двух подходов: с одной стороны, нацеленность на широкий охват школьников, массовость и доступность, но при этом в основе содержательной части программы лежат специфические тематические разделы, не затрагиваемые в школьном курсе математики, но имеющие важное теоретическое и прикладное значение. Иначе говоря, это попытка перенести основную структуру существующих программ дополнительного образования для высокомотивированных школьников с высоким начальным уровнем (и прошедших некоторый начальный отбор), на более широкую целевую аудиторию учащихся, заинтересованных в дополнительных занятиях математикой.

Второй особенностью является распределенность и чередуемость наиболее крупных и важных содержательных блоков в структуре программы. С учетом объективных возрастных особенностей предполагаемой аудитории программы разумным выглядит сознательный отказ от длительного изучения одной темы, приводящего к снижению заинтересованности и включенности учащихся. Вместо этого адекватным решением является разбиение крупного тематического раздела на более мелкие содержательные учебные модули и распределение их по учебно-тематическому плану. Это позволит активизировать интерес к содержанию программы (учащиеся увидят содержательное разнообразие

математики, смогут переключаться с одного тематического раздела на другой) и при этом периодически актуализировать полученные ранее знания.

### ***Педагогическая целесообразность программы***

- Программа естественным образом дополняет школьный курс обучения, ориентируясь в большей степени не на алгоритмичность работы с математическими структурами и выполнения математических операций, а на изучение общих методов, идей и принципов решения математических задач.
- Программа включает новые области знаний, расширяющие кругозор и дающие представления о системе естественнонаучных знаний и об основных принципах научности.
- Программа стимулирует инициативу и самостоятельность учащихся, в умственном и личностном развитии способствует реализации и развитию творческих способностей, соответствует познавательным интересам и индивидуальным образовательным запросам учащихся.

### ***Целевая аудитория программы***

Программа рассчитана на интересующихся математикой учащихся 5 – 6 классов общеобразовательных учреждений. Жесткие требования к необходимому начальному уровню обучающихся отсутствуют, для понимания содержательной части тематических разделов программы вполне достаточно успешного освоения программы начальной школы. Реализация программы предполагает хорошего уровня начальной математической подготовки в объеме программы общеобразовательной школы для соответствующего возраста, а также умения логически рассуждать.

Программа ориентирована на подготовку школьников к реальной практической деятельности, научно исследовательской работе, на создание своеобразной коммуникативной среды,

способствующей саморазвитию и реализации творческого потенциала.

### ***Механизмы реализации программы***

Предлагаемая программа предусматривает:

- теоретические занятия,
- практические занятия,
- самостоятельные занятия школьников.

Теоретические занятия состоят из лекций и самостоятельной работы с теоретическим материалом. В основе практических занятий лежит индивидуальное выполнение различных заданий, преимущественно направленных на решение математических задач, а также проведение групповых обсуждений и консультаций. Также практическая составляющая обогащена активными формами обучения, участием школьников в личных математических соревнованиях, имитирующих научно-исследовательскую деятельность и прививающих умения и навыки, свойственные будущей научной работе. Усиление научного содержания программы требует также систематического использования исследовательского метода в обучении, его следует рассматривать как такую организацию занятий, при которой учащиеся осознают огромную значимость изучаемой проблемы, пользуются методами, понятиями для решения поставленной проблемы.

В основу реализации данной программы положены следующие основные принципы:

- изучение новых областей математики, овладение научными умениями и навыками производится в предположении строгой логической обоснованности переходов от одного раздела математики к другому, что составляет принцип систематичности и последовательности;
- в ходе занятий учащимся сообщаются знания, основанные на проверенных и обоснованных положениях, фактах, теориях, что является основной составляющей принципа научности;

- принцип сознательности и активности, предполагающий понимание учащимися смысла усваиваемой информации, понимание цели и значимости учебной деятельности.

### **Сроки реализации программы и режим занятий**

Продолжительность обучения по программе составляет 1 год. Предусмотренная программой нагрузка для полного успешного прохождения базового курса первого года обучения составляет 2 часа в неделю, при этом для обучающихся данного возраста рекомендуется проводить занятия в следующем режиме: 1 занятие (в неделю) по 2 академических часа. Увеличение нагрузки возможно за счет проведения дополнительных курсов, реализованных в виде дополнительных занятий или математических соревнований.

### **Предполагаемые результаты**

Предполагаемыми результатами реализации программы являются:

- развитие интереса к математике, активизация познавательной деятельности, интерес к продолжению дополнительных систематических занятий математикой;
- формирование математических компетенций, овладение новыми идеями и методами решения математических задач;
- развитие первичных навыков научной математической деятельности;
- повышение общего интеллектуального и математического уровня обучающихся;
- развитие математической интуиции, логического мышления, формирование и развитие математической культуры;
- формирование умений адекватного и эффективного применения изученных методов и принципов в решении практических задач, а также умения

представления достигнутых результатов в сочетании с их обсуждением.

### **Формы обучения и контроля**

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным и методическим материалом.

Предполагаются следующие формы организации обучения:

- индивидуальная, групповая, коллективная;
- взаимное обучение, самообучение, саморазвитие.

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля:

- текущий контроль,
- итоговый контроль.

Программой предусмотрено проведение лекционных, практических занятий, выполнение контрольных работ, проведение математических соревнований. Текущий контроль усвоения материала осуществляется на основе проверочных, контрольных работ, тестов. Предусматривается дифференцированный итоговый контроль: итоговая контрольная работа, очный зачет, математические олимпиады различного уровня.

## Учебно-тематический план

### Структура

Программа первого года обучения рассчитана учащихся 5–6 класса. В зависимости от представленности школьников различного возраста в учебной группе конкретного математического объединения существует возможность выбора одного из следующих стандартных учебных планов:

- Учебно-тематический план №1: 5 класс
- Учебно-тематический план №2: 5-6 класс
- Учебно-тематический план №3: 6 класс

Предложенные варианты учебно-тематического плана содержат одинаковый набор основных тематических разделов. Различия предложенных планов реализованы следующим образом:

- в структуре программы: учебно-тематические планы отличаются распределением времени, отведенного на освоение конкретных тематических разделов (и, как следствие, в разбиении тематических блоков на учебные модули);
- в структуре разделов: в зависимости от возраста, можно регулировать общую структуру разделов (какие именно подразделы будут рассматривать со школьниками, а какие можно исключить, затрагивая общей структуры курса);
- в содержании разделов: реализуется подбором задач и учебных примеров в зависимости от текущего уровня и/или возраста школьников (например, с точки зрения соответствия учебной программе курса математики общеобразовательной школы).

Разделение по возрасту носит достаточно условный характер: по умолчанию предполагается, что в том случае, если учебная группа состоит полностью или почти полностью из пятиклассников, то выбирается первый вариант учебно-тематического плана (для 5 класса), если преимущественно из шестиклассников – третий вариант, если в группе нет явного перекоса между количеством пятиклассников и

шестиклассников – компромиссный второй вариант плана. В то же время вполне допустимо (например, если была возможность оценить начальный уровень математической подготовленности учебной группы в целом) при выборе конкретного варианта учебно-тематического плана ориентироваться на общий начальный уровень учебной группы в данном математическом объединении (например, объективно сильная группа пятиклассников вполне может заниматься по второму или третьему варианту плана, а для отдельных групп шестиклассников можно выбрать и первый вариант учебно-тематического плана).

Вариативность образовательной программы достигается подбором варианта учебно-тематического плана (при этом допустимо разрабатывать и адаптированный вариант плана, самостоятельно варьируя количество часов, отведенных на каждый конкретный тематический раздел), а также адаптируя уровень подачи материала и изучения тематических разделов, в том числе за счет выбора уровня и содержания предлагаемых задач.

### Тематические разделы

Программа первого года обучения предполагает изучение следующих основных тематических разделов:

#### 1. Общие принципы решения математических задач

Обсуждаются основные идеи, подходы, методы и принципы решения математических задач: предположения, перебор вариантов, логический вывод, получение противоречия и идея доказательства от противного, примеры и контрпримеры.

#### 2. Логика

На примере логических задач предлагаются основные свойства высказываний и операций над ними (элементы алгебры логики).

#### 3. Четность и чередование

Изучаются различные идеи явного или неявного использования чётности или нечётности количества

объектов: чередование, разбиение на пары, применение свойств чётных и нечётных чисел.

#### 4. Делимость и остатки

Основные свойства делимости чисел, разложение чисел на множители, простые и составные числа, делители чисел, общие делители, деление с остатком и свойства остатков.

#### 5. Принцип Дирихле

Идея использования принципа Дирихле: общее представление, расширенная формулировка, доказательства, применение в арифметических и комбинаторных задачах.

#### 6. Клетчатые доски и таблицы

Рассматриваются задачи разного рода, в которых объекты (числа, фишки, клетки) размещаются в таблицах или на клетчатых досках. Применяются общие принципы решения математических задач.

#### 7. Алгоритмы и операции

Решаются задачи на взвешивание, переливание, перемещение и прочие задачи, в которых необходимо предложить последовательность операций для достижения заданного результата.

#### 8. Множества и основы комбинаторики

Вводятся основные понятия теории множеств: множества, описания множеств, операции над ними, свойства операций. Вводится теоретико-множественная нотация. Обсуждаются общие идеи подсчета элементов множеств: полный перебор, упорядочение перебора, деревья вариантов, правила сложения и умножения вариантов.

#### 9. Введение в геометрию

Разрезание и составление фигур, перекладывание спичек и других объектов. Длины, расстояния, площади.

#### 10. Математические соревнования

Ознакомление с правилами математического аукциона, математического хоккея, карусели, регаты. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров. Проведение соревнований.

Описанные тематические разделы разделяются на подразделы (учебные модули) и распределяются по учебно-тематическому плану в зависимости от выбора текущего варианта плана (образовательной траектории).

## Разделы программы и формы обучения

### Учебно-тематический план №1: 5 класс

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
1.	Общие принципы решения математических задач: модуль 1	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
2.	Логика: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
3.	Четность и чередование: модуль 1	4	1	3	Контрольная работа, командное математическое соревнование
4.	Принцип Дирихле: модуль 1	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос
5.	Клетчатые доски и таблицы	4	1	3	Фронтальный опрос, математическое соревнование
6.	Математические соревнования: модуль 1	2	0	2	Математическое соревнование
7.	Алгоритмы и операции: модуль 1	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
8.	Множества и основы комбинаторики: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
9.	Общие принципы решения математических задач: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
10.	Введение в геометрию: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
11.	Логика: модуль 2	4	1	3	Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение
12.	Математические соревнования: модуль 2	2	0	2	Математическое соревнование
13.	Четность и чередование: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
14.	Общие принципы решения математических задач: модуль 3	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
15.	Делимость и остатки	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
16.	Принцип Дирихле: модуль 2	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос
17.	Множества и основы комбинаторики: модуль 2	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос
18.	Математические соревнования: модуль 3	2	0	2	Математическое соревнование
19.	Введение в геометрию: модуль 2	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос
20.	Общие принципы решения математических задач: модуль 4	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
21.	Алгоритмы и операции: модуль 2	4	1	3	Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение
22.	Математические соревнования: модуль 4	2	0	2	Математическое соревнование
	<b>ИТОГО</b>	<b>70</b>	<b>22</b>	<b>48</b>	

### Учебно-тематический план №2: 5-6 класс

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
1.	Общие принципы решения математических задач: модуль 1	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
2.	Логика: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
3.	Четность и чередование: модуль 1	4	1	3	Контрольная работа, командное математическое соревнование
4.	Принцип Дирихле: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
5.	Клетчатые доски и таблицы	4	1	3	Фронтальный опрос, работа в группах
6.	Математические соревнования: модуль 1	2	0	2	Математическое соревнование
7.	Алгоритмы и операции: модуль 1	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
8.	Делимость и остатки: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
9.	Множества и основы комбинаторики: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
10.	Общие принципы решения математических задач: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
11.	Введение в геометрию: модуль 1	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
12.	Логика: модуль 2	2	1	1	Фронтальный опрос, обсуждение
13.	Математические соревнования: модуль 2	2	0	2	Математическое соревнование
14.	Четность и чередование: модуль 2	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос
15.	Принцип Дирихле: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
16.	Делимость и остатки: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
17.	Математические соревнования: модуль 3	2	0	2	Математическое соревнование
18.	Множества и основы комбинаторики: модуль 2	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
19.	Общие принципы решения математических задач: модуль 3	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
20.	Введение в геометрию: модуль 2	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос
21.	Алгоритмы и операции: модуль 2	2	1	1	Работа в группах, обсуждение
22.	Математические соревнования: модуль 4	2	0	2	Математическое соревнование
<b>ИТОГО</b>		<b>70</b>	<b>22</b>	<b>48</b>	

#### Учебно-тематический план №3: 6 класс

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
1.	Общие принципы решения математических задач: модуль 1	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
2.	Логика: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
3.	Четность и чередование	4	1	3	Контрольная работа, командное математическое соревнование
4.	Делимость и остатки: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
5.	Принцип Дирихле: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
6.	Клетчатые доски и таблицы: модуль 1	4	1	3	Индивидуальный опрос, работа в группах

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
7.	Математические соревнования: модуль 1	2	0	2	Математическое соревнование
8.	Алгоритмы и операции: модуль 1	4	1	3	Индивидуальный опрос
9.	Множества и основы комбинаторики: модуль 1	4	2	2	Фронтальный и индивидуальный опрос
10.	Общие принципы решения математических задач: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
11.	Делимость и остатки: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
12.	Введение в геометрию: модуль 1	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
13.	Логика: модуль 2	2	1	1	Фронтальный опрос, обсуждение
14.	Математические соревнования: модуль 2	2	0	2	Математическое соревнование
15.	Принцип Дирихле: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
16.	Делимость и остатки: модуль 3	4	1	3	Индивидуальный опрос
17.	Множества и основы комбинаторики: модуль 2	4	1	3	Фронтальный и индивидуальный опрос
18.	Алгоритмы и операции: модуль 2	2	1	1	Работа в группах, обсуждение

№ п/п	Название раздела или модуля	Всего	Лекции	Практика	Формы контроля
19.	Клетчатые доски и таблицы: модуль 2	2	1	1	Индивидуальный опрос, работа в группах
20.	Введение в геометрию: модуль 2	2	1	1	Фронтальный и индивидуальный опрос
21.	Математические соревнования: модуль 3	2	0	2	Математическое соревнование
	<b>ИТОГО</b>	<b>70</b>	<b>22</b>	<b>48</b>	

## Содержание курса

*Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач*

*Содержание раздела:*

- Ситуации, их анализ.
- Логический вывод.
- Предположения, метод от противного.
- Перебор возможностей.
- Примеры и контрпримеры.

Учащиеся знакомятся с основными (общими) принципами решения математических задач, осознают необходимость обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. В ходе лекционных занятий учащиеся осваивают основные логические схемы рассуждения, закрепляя их при решении практических задач с устным изложением решений.

В ходе практических занятий учащимся предлагаются задачи на полный перебор случаев, возможностей, комбинаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез. Общие принципы решения задач иллюстрируются при решении логических практических задач на работу с истинными и ложными высказываниями, утверждениями. Допускается рассмотрение текстовых задач, типичных (по структуре) для стандартного школьного курса – на движение, на работу, на подсчет объектов, – но с необычной формулировкой или возможной оригинальной идеей решения.

*Тематический раздел 2. Логика*

*Содержание раздела:*

- Высказывания, их истинность и ложность. Операции над высказываниями.
- Логический вывод, предположения, противоречия, метод от противного.
- Полный перебор возможностей.
- Метод предположений.

- Правила логического вывода.
- Упорядочение перебора вариантов: деревья вариантов, таблицы истинности.

Повторяются и обсуждаются общие принципы решения математических задач, подчеркивается необходимость обоснования математических утверждений, актуализируются понятия частного и общего случая, закрепляется понимание различий между доказательством и проверкой на частных примерах. Формируются навыки работы с основными логическими конструкциями, такими как следствие, равносильность, необходимость, достаточность, существование, всеобщность. Логические понятия, связки, схемы рассуждения, общие принципы решения задач и доказательств, полученные на лекционных занятиях, закрепляются при решении практических задач с устным или письменным изложением решений.

На практических занятиях предлагаются задачи на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез, полный перебор комбинаций истинности и ложности высказываний. Общие свойства операций над высказываниями и правила корректного логического вывода закрепляются при решении и обсуждении логических задач.

### *Тематический раздел 3. Четность и чередование*

#### *Содержание раздела:*

- Чередование.
- Четные и нечетные числа.
- Свойства четных и нечетных чисел.
- Разбиение на пары, соответствия.

Изучаются простейшие свойства делимости (на примере делимости на 2), понятие четности рассматривается на наглядных примерах (как способность к разбиению на пары, возможность чередования элементов). Обсуждаются свойства четных и нечетных чисел (сумма двух чисел одинаковой четности четна, сумма двух чисел разной четности нечетна, произведение четно тогда и только тогда, когда четным является один из множителей; переход к более сложным свойствам – четность или нечетность суммы нечетного количества нечетных

слагаемых, обобщенные понятия – числа одинаковой и разной четности).

Знание свойств закрепляется при решении задач на соответствия, на разбиения на пары, на чередования. Разбираются простейшие задачи на раскраску, на разбиение чисел. В ходе решения и обсуждения задач закрепляется понимание разницы между частными и общими случаями, примером и доказательством.

### *Тематический раздел 4. Делимость и остатки*

#### *Содержание раздела:*

- Делимость и делители, кратность.
- Простые и составные числа.
- Разложение на простые множители.
- Общие делители, взаимно простые числа.
- Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10.

В ходе занятий по данной теме учащиеся исследуют основные свойства делимости (арифметические свойства делимости на одно число – сумма и разность чисел одинаковой одномодульной делимости, произведение, в котором один из множителей делится на данное число), закрепляется навык поиска делителей натурального числа, исследуются основные свойства простых и составных чисел, делимости на простое число.

При решении задач развиваются навыки поиска общих делителей чисел, приобретаются умения использования разложения на простые множители для анализа делимости чисел (поиска делителей, в 6 классе можно уделить внимание поиску общих делителей, общих кратных). Учащиеся повторяют простейшие признаки делимости, закрепляют навык их использования для эффективного поиска делителей числа и разложения натурального числа на простые множители.

В группе шестиклассников можно уделить внимание основной теореме арифметики о существовании и единственности разложения числа на простые множители, продемонстрировать ее применение при решении задач на доказательство (для 5 класса достаточно будет просто ее

сформулировать и проиллюстрировать на примере задач). Осваивается умение обоснования признаков делимости на различные числа, формируются навыки поиска контрпримеров к неверным признакам. Полученные навыки закрепляются при решении практических задач.

#### *Тематический раздел 5. Принцип Дирихле*

##### *Содержание раздела:*

- Принцип Дирихле: общее представление.
- Обобщенный вариант принципа Дирихле.
- Принцип Дирихле в арифметических задачах.

Учащиеся получают представление о простом и обобщенном принципе Дирихле, отрабатывают умение преобразовывать интуитивные предпосылки в форму строгого математического доказательства. Дополнительно повторяются общие методы и схемы доказательств: доказательство от противного, оценка и пример; обсуждаются возможности неконструктивных доказательств существования объектов (на примере решения задач на доказательство существования чисел с определенными свойствами), развивается умение различать условие задачи (посылку) и заключение (вывод), формируется понимание отличия интуитивных выводов и суждений от строгих доказательств. В ходе изучения данной темы повторяются свойства делимости и остатков, которые органично используются как этапы доказательств и решений задач.

#### *Тематический раздел 6. Клетчатые доски и таблицы*

##### *Содержание раздела:*

- Примеры и контрпримеры в таблицах
- Задачи на оптимизацию на клетчатых досках
- Комбинаторные задачи на клетчатых досках
- Идеи инвариантов для клетчатых досок и таблиц

Рассматривается набор математических задач, в которых объекты (числа, метки, фишки или знаки) располагаются в ячейках таблицы или в полях клетчатой доски. На примере таблиц и клетчатых досок рассматриваются различные оптимизационные задачи (например, нахождение

максимального или минимального количества фишек или каких-либо иных объектов, при котором выполняется некоторое заданное свойство) – при этом рассматриваются примеры задач на построение точных оценок (задачи типа «оценка плюс пример» – синтез логического обоснования и конструирования). Допустимо рассмотреть различные варианты расположения шахматных фигур или новых фигур, «по мотивам шахматных».

Также в группах 5-6 или 6 классов на примере некоторых задач с таблицами и досками возможно рассмотрение некоторой разновидности идеи инварианта – независимости значения некоторой величины от способа подсчета (например, по строкам и столбцам), а также ознакомить с идеей окраски таблиц и клетчатых досок для рассмотрения простейших инвариантов, связанных с окраской.

#### *Тематический раздел 7. Алгоритмы и операции*

##### *Содержание раздела:*

- Задачи на взвешивание
- Задачи на переливание
- Процессы и операции

Учащиеся на примере алгоритмических задач на взвешивание и переливание приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. На примере заданий на построение наиболее оптимального (по количеству действий) алгоритма рассматриваются идеи сравнения трудоемкости алгоритмов, важные при дальнейшем изучении информатики и программирования. В том случае, если учащиеся уже рассмотрели до этого идеи инвариантов (в соответствующем тематическом учебном модуле), допускается изучение возможности или невозможности получения необходимого результата с помощью допустимых операций.

### Тематический раздел 8. Множества и основы комбинаторики

#### Содержание раздела:

- Понятие множества. Элементы множества.
- Задание множеств. Равенство множеств.
- Теоретико-множественная нотация.
- Объединение, пересечение, дополнение множеств.
- Диаграммы Эйлера-Венна.
- Понятие варианта, комбинации, основные способы их перебора.
- Дерево возможных вариантов.
- Правила сложения и умножения вариантов.

Учащимся вводится понятие множества, описываются общие свойства множеств, возможные варианты задания (описания) множеств, вводятся основные операции над множествами. Допустимо (особенно в группах шестиклассников) отдельно сделать упор на формальном способе записи множеств и операций над ними (теоретико-множественная нотация). В качестве наглядной иллюстрации введенных понятий используются диаграммы Эйлера-Венна; учащиеся самостоятельно строят такие диаграммы при решении задач на подсчет элементов в множествах.

При изучении данного раздела (в части, относящейся к основам теории множеств) учащимся вводятся те понятия, которые в дальнейшем используются практически во всех разделах математики. В практической части данного тематического раздела учащимся демонстрируется необходимость полного рассмотрения вариантов в переборных задачах, обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций. Обсуждаются способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения. Особое внимание уделяется изучению правил сложения и умножения вероятностей, формируется умения правильно применять данные законы, что закрепляется при решении практических задач.

### Тематический раздел 9. Введение в геометрию

#### Содержание темы:

- Основные геометрические понятия.
- Разрезания. Равносоставленность фигур.
- Длины, расстояния, площади.
- Неравенство треугольника.

Учащиеся кратко, во многом на интуитивном уровне, знакомятся с некоторыми геометрическими понятиями и свойствами. При решении задач на разрезание учащиеся по большей части работают самостоятельно, задачи предлагаются в порядке последовательного усложнения. Сравнение площадей многоугольников рассматривается с помощью идеи равносоставленности.

Неравенство треугольника иллюстрируется интуитивной геометрической интерпретацией («путь по прямой короче, чем по ломаной (не по прямой)»). Возможно решение оптимизационных задач с использованием неравенства треугольника, в этом случае особое внимание уделяется наличию в решении двух обязательных составляющих: оценки и примера.

### Тематический раздел 10. Математические соревнования

#### Содержание темы:

- Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абаки.
- Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.
- Проведение соревнований.

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Учащиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

## Методическое обеспечение

### Математические соревнования

Существует достаточно много различных форм внеурочной математической деятельности. Широкое распространение получили математические олимпиады различных уровней, проводимые с целью привлечения способных школьников к занятию математикой. Также достаточно популярными являются такие виды состязаний как математические аукционы, брейн-ринги, викторины, математические регаты и «математические драки».

Как правило, математические соревнования включают в себя индивидуальную или групповую работу над решением интересных нестандартных задач, письменное или устное изложение решения, прямое взаимодействие с другими участниками или членами жюри. Ряд математических соревнований формируют умения поиска ошибок и недочетов в предложенном решении (например, оппонирование на математическом бое), оценку трудности задач (с целью выбора правильной игровой стратегии на математическом аукционе или математическом бое), анализ своих сильных и слабых сторон (например, в ходе математической регаты), отрабатывают навыки письменной и устной монологической речи, а также формируют важные черты математической культуры и прививают навыки ведения научной дискуссии.

Ниже приводятся правила наиболее распространенных личных и командных математических соревнований.

#### Письменная личная математическая олимпиада

Каждый участник получает комплект задач (как правило, от 4 до 6), которые решает в течение отведенного времени (3-4 часа; младшим школьникам рекомендуется отводить на решение задач 1,5-2 часа). Решения задач оформляются письменно и предоставляются на проверку членам жюри.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. В ходе проверки по каждой задаче соответственно выставляется от 0 до 7 баллов. Допускается и проведение олимпиады, в которой стоимость задач может отличаться. Общий итог подводится суммированием баллов.

#### Устная личная математическая олимпиада

Участникам предлагается комплект задач. Все задачи делятся на две группы «выводные» и «довыводные». Участник олимпиады, решивший 3 задачи из первой группы (на их решение отводится 2,5 часа), получает вторую группу задач и еще 1 час дополнительного времени.

Решив задачу (или несколько задач), школьник вызывается отвечать и рассказывает решение одному из членов жюри. Тот ищет ошибки и, если какие-то места в решении требуют более подробного объяснения, задает соответствующие вопросы. Отвечающий может исправлять и дополнять решение "на ходу", но если он не может сделать этого достаточно быстро (например, думает больше минуты), то засчитывается неверный подход. Всего участник может сделать не больше трех подходов по каждой задаче. Если он не смог рассказать решение за три попытки, то он лишается права отвечать эту задачу. При подведении итогов количество неверных подходов не учитывается.

Если принимающий счел решение правильным, то, оно засчитывается и школьник возвращается на место решать другие задачи. Так же каждое решение оценивается баллами (по каждой задаче от 1-го до 7-ми). Если школьник получил неполный балл по данной задаче (такое возможно, даже если решение признано верным) и у него остались подходы, он может исправить допущенные огрехи. "Подозрительные" решения перепроверяются жюри, и бывает (впрочем, не часто), что обнаруживается хитрая ошибка, не найденная во время ответа. Если олимпиада еще не закончилась, то школьнику сообщают об ошибке и предлагают исправить или дополнить решение, а запись о его ответе аннулируется. После конца олимпиады

изменения в протоколе уже невозможны, даже если выяснилось, что кто-то рассказал неверное решение.

Допускается использовать следующую систему оценки: решенная задача – 1 балл, нерешенная задача – 0 баллов, при этом номер подхода не учитывается. Также допускается варьировать количество довыводных и выводных задач и количество времени, отводимого на их решение.

При подведении итогов все баллы суммируются.

### **Устная командная математическая олимпиада**

На каждую из команд выдается одинаковый комплект задач, которые она решает в течение отведенного промежутка времени (как правило, 3-4 часа).

Решение задачи представляется устно одним из членов команды, причем только одной судейской бригаде. При этом команде желательно иметь с собой необходимые для рассказа решения чертежи и выкладки. На изложение решения каждой задачи дается три попытки. Если все они использованы, а решение задачи не засчитано, то команда не может подходить с решением этой задачи. Каждый член команды может подходить с решениями не более чем двух различных задач. Если решение задачи предоставляется сначала одним игроком, а затем другим, то выходы засчитываются как одному игроку, так и другому. Победитель определяется по количеству решенных задач. В случае равенства количества решенных задач могут учитываться количество подходов и сложность решенных задач.

### **Математический хоккей**

Математический хоккей – это командное соревнования по решению задач. Рисуются игровое поле, визуально напоминающее хоккейную площадку, на котором выделяются ключевые точки: центральное поле (средняя линия, центр поля, зона центрального вбрасывания), зоны соперничающих команд, линии ворот. В начале игры шайба находится в центре поля. Задачи предлагаются по одной. Команда, верно решившая задачу первой, перемещает шайбу в сторону ворот соперников

(по отмеченным на поле ключевым точкам). При этом, если шайба уже находится на линии ворот соперников, считается, что команда забила гол, а шайба переносится в центр.

Возможен вариант с разделением игроков соперничающих команд по ролям: игроки двух команд делятся на нападающих, защитников и вратаря. После решения каждой задачи шайба перемещается в сторону ворот проигравшей команды. Если вратарь проигрывает нападающим, то забивается гол, и шайба возвращается в центр поля.

### **Математическая карусель**

Математическая карусель – это командное соревнования по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах – исходном и зачетном, но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение судье. Если оно верное, игрок №1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, решение предъявляет судье игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный, а на зачетном возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного переходит на исходный.

Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. И на исходном, и на зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной.

После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задача начинается решаться тогда, когда этот участник там появляется.

За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если  
а) кончилось время, или  
б) кончились задачи на зачетном рубеже, или  
в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговаривается.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

## Математическая абака

Математическая абака (математический квадрат) – это командная игра-соревнование по решению задач. Все задачи выдаются для решения всем командам одновременно. Основным зачётным показателем в математической абаке является общее количество набранных очков (включая бонусы). В случае равенства очков у нескольких команд более высокое место занимает команда, имеющая большую сумму бонусов. При

равенстве и этого показателя команды считаются разделившими места.

Решение задач. Каждой команде предлагается для решения 6 тем по 6 задач в каждой теме. Задачи каждой темы сдаются по порядку, от 1-й до 6-й (например, у команды не примут ответ на 4-ю задачу, пока она не сдала ответы на задачи 1, 2 и 3). На каждую задачу отводится один подход (одна попытка сдать ответ). Если команда предъявила правильный ответ на задачу, она получает за это цену задачи, а если неправильный или неполный – 0 очков. В некоторых задачах по усмотрению жюри цена задачи может быть поделена поровну между всеми возможными ответами, в этом случае каждый найденный ответ приносит команде соответствующую часть цены. Для каждой такой задачи это указывается в ее условии.

Цена первой задачи каждой темы – 10 очков, второй – 20, ..., шестой – 60 очков. (Таким образом, не считая бонусов, команда может заработать за решение задач до  $6 \cdot 210 = 1260$  очков.)

Основные бонусы. Каждая команда дополнительно может заработать бонусные очки:

- За правильное решение всех задач одной темы («бонус-горизонталь») – 50 очков
- За правильное решение задач с одним и тем же номером во всех темах («бонус-вертикаль») – цену задачи с этим номером

Бонусы за первое решение. Первые команды, получившие каждый из шести возможных бонус-горизонталей и каждый из шести бонус-вертикалей, получают их в двойном размере.

Окончание игры. На решение задач отводится 90 минут. Игра для команды оканчивается, если у нее кончились задачи или истекло общее время, отведенное для игры.

## Математическая регата

В регате участвует некоторое количество команд. В составе каждой команды – 4 человека. Соревнование проводится в четыре тура. Каждый тур представляет собой коллективное

письменное решение трех задач. Любая задача оформляется и сдается в жюри на отдельном одинарном листе, причем каждая команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач.

Проведением регаты руководит Координатор. Он организует раздачу заданий и сбор листов с решениями; проводит разбор решений задач и обеспечивает своевременное появление информации об итогах проверки.

Время, отведенное командам для решения, и стоимость задач каждого тура в баллах указаны на листах с условиями задач, которые каждая команда получает непосредственно перед началом каждого тура.

Параллельно с ходом проверки, Координатор осуществляет для учащихся разбор решений задач, после чего школьники получают информацию об итогах проверки. После объявления итогов тура, команды, не согласные с тем, как оценены их решения, имеют право подать заявки на апелляции.

Команды-победители и призеры регаты определяются по сумме баллов, набранных каждой командой во всех турах.

### **Математический брейн-ринг**

В игре участвуют 4-6 команд по 4-6 человек. Команды рассаживаются в аудитории. Каждая команда выбирает себе капитана. Ведущий оглашает условие задачи, её стоимость в баллах и время на решение этой задачи (время подготовки).

В течение времени подготовки команды пытаются решить задачу. Если в течение времени подготовки капитан какой-то команды поднял руку, то к доске немедленно выходит один из членов данной команды. Если подняли руки несколько капитанов, то к доске выходит член команды, капитан которой поднял руку первым. Спорные ситуации разрешаются жюри.

Вышедший к доске игрок ждет окончания времени подготовки. Он не может общаться с командой до конца рассказа решения. По окончании времени подготовки команды, кроме той, представитель которой находится у доски, сдают в жюри письменные решения задачи. От каждой команды принимается к рассмотрению только одно решение. После сдачи

письменных решений игрок, находящийся у доски, рассказывает своё решение задачи. Жюри по ходу рассказа и после него задаёт вопросы и делает замечания.

Письменные решения оцениваются жюри, исходя из объявленной стоимости задачи. При выходе члена команды к доске с команды автоматически снимается стоимость задачи. Рассказанное у доски решение оценивается, исходя из удвоенной стоимости задачи. Оглашается счет по задаче. Если задачи не исчерпаны, описанная выше процедура повторяется.

Итог подводится по суммарному числу набранных баллов.

### **Математический аукцион**

Соревнование также известно под названием «математическая драка».

Участие в соревновании индивидуальное. Ведущий предлагает задачи по одной, объявляя ее стоимость в баллах и отводимое для ее решения время. Если в течение отведенного времени один из участников сигнализирует о решении задачи поднятием руки, то решение выслушивается, после чего задача признается либо решенной, либо нерешенной (в том случае, если есть какие-либо недочеты). В том случае, если задача решена, то участник получает заявленное количество баллов, и обсуждение данной задачи прекращается. Если задача не решена, то она остается в розыгрыше (при этом выступившие по данной задаче участники не имеют права предоставлять новое решение).

Если в течение отведенного времени задача не решена ни одним из участников, ведущий может поднять стоимость задачи и добавить время на ее решение; эта операция может повторяться для данной задачи неоднократно (при этом ведущий заранее объявляет процедуру увеличения стоимости).

Данная процедура повторяется для каждой из вынесенных на аукцион задач. Итог подводится по общему количеству набранных каждым участником баллов.

## Список литературы

### Учебно-методическая литература

1. Блинков А. Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – М.: МЦНМО, 2012
2. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. – М.: Физматгиз, 1961.
3. Верещагин Н. К., Шень А. Х. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002.
4. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – М.: МЦНМО, 2005.
5. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1978.
6. Генкин С. А., Интенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.
7. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972.
8. Евдокимов М. А. От задачек к задачам. – М.: МЦНМО, 2004.
9. Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. – М., МЦНМО, 2002.
10. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 1997.
11. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – М.: МЦНМО, 2011
12. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. – М., МЦНМО, 2004.
13. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958.
14. Кэрролл Л. Логическая игра. – М.: Наука, 1991.
15. Левин А. Ю. Что такое комбинаторика. – М.: «Квант», 1999 г., № 5, 6
16. Муштари Д. Х. Подготовка к математическим олимпиадам. – Казань, 1990.
17. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1974.
18. Спивак А. В.. Математический праздник. – М.: МЦНМО, 1995.
19. Толпыго А. К. Инварианты. – «Квант», 1976, №12.
20. Тригг Ч. Задачи с изюминкой.
21. Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н. Наглядная геометрия. – М, 1992.

22. Шень А. Х. Игры и стратегии с точки зрения математики – М.: МЦНМО, 2007.
23. Шень А. Х. Простые и составные числа – М.: МЦНМО, 2005.
24. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.

### Сборники задач

1. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет – М.: МЦНМО, 2007.
2. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М., Наука, 1975.
3. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.
4. Бугаенко В. О. Турниры им. Ломоносова. – М.: МЦНМО, 1998.
5. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1. – М.: Бюро Квантум, 2010.
6. Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.
7. Математические бои. Материалы XIII областного турнира. Методическое пособие. – Ярославль: ГУ ЦОШ «Олимп», 2007
8. Математические бои. Материалы XIV областного турнира. Методическое пособие. – Ярославль: ГУ ЦОШ «Олимп», 2008
9. Математические турниры им. А. П. Савина. Составитель А.В. Спивак. – М.: Бюро Квантум, 2006
10. Произволов В. В. Задачи на вырост – М.: МИРОС, 1995.

Учебное издание

**Авторы программы:**

Юрий Викторович Богомолов

Сергей Геннадьевич Волченков

Илья Сергеевич Кащенко

Игорь Евгеньевич Преображенский

**Дополнительная образовательная программа  
математических объединений: первый год обучения**

Подписано в печать 10.09.2014. Формат 60x92/16.

Объем 2,5 п. л., 1,5 уч.-изд. л. Тираж 70 экз.

Заказ № 3971

Фирма-типография

ИД «Канцлер» (ООО «Канцлер»)

150008, г. Ярославль, ул. Клубная, 4-49

Телефон (4852) 58-76-33